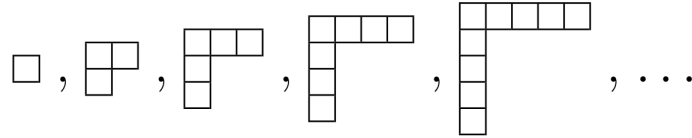


Д2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ

1 Рассмотрим последовательность «уголков». Сколько клеток в k -том уголке и чему равна суммарная площадь первых k уголков?



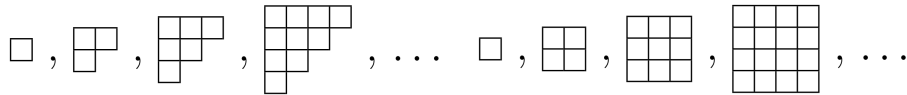
2 Найдите суммы чисел

а) Чему равно k -е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел?

б) Чему равно k -е чётное число и сумма первых k чётных чисел?

в) Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная с 179.

3 а) Числа $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, \dots$ Диофант называл треугольными. Это площади лесенок. Четырёхугольные числа — это площади квадратов.



б) Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.

в) Что получится при сложении T_n с T_n ?

г) Выразите T_n через n (и тем самым получите формулу для суммы $1 + 2 + \dots + n$).

4 Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.

5 Докажите геометрически:

а) $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$; б) $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$.

6 (Пифагорова таблица умножения)

а) Докажите тождество $mk = km$

(то есть докажите, что $k + \dots + k$ (m раз) $= m + \dots + m$ (k раз)).

б) Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке?

7 а) б) Сколько клеток в k -м (считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы) «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k, 2 \times k, \dots, (k-1) \times k$?

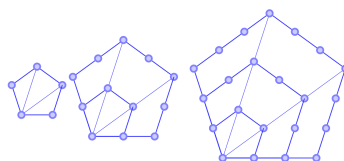
в) Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

8 Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление:

	1	2	3	4	5	n
1						
2						
3						
4						
5						
n						

$$1 = 1^3, \quad 3 + 5 = 2^3, \quad 7 + 9 + 11 = 3^3, \quad 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3, \dots$$

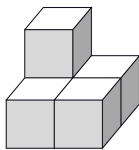
9 Пятиугольные числа $P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22, \dots$ показаны снизу.



Найдите разность $P_k - P_{k-1}$. Выразите P_n через n .

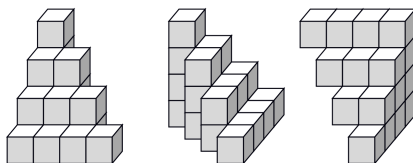
10 Докажите геометрически, что сумма n -го треугольного и n -го квадратного числа на n больше, чем n -е пятиугольное число.

11* Число k^2 можно представлять как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму чисел $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ — как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов. Обозначим эту пирамиду $Sq(n)$.



Сложите из шести пирамид $Sq(n)$ параллелепипед. Каковы его размеры и объём? Выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

12 На рисунке снизу изображены несколько пирамид высоты 4, каждая состоит из $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ кубиков.



а) Выберите одну из пирамид и нарисуйте её горизонтальные слои: нижний, второй снизу, ..., верхний.

б) Нарисуйте передний, второй спереди, ..., задний слои выбранной пирамиды.

в) Нарисуйте самый левый, второй слева, ..., самый правый слои выбранной пирамиды.

г) Сложите из шести пирамид такого вида параллелепипед. Каковы его размеры?

д) Как сложить параллелепипед из шести пирамид аналогичного вида, но высоты n ? Найдите формулу для суммы $T_1 + T_2 + \dots + T_n$ (эта сумма обозначается Π_n и называется n -м пирамидальным числом).

е) Сложите из двух таких пирамид высоты n и высоты $n - 1$ пирамиду $Sq(n)$ и выведите отсюда формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

ж) Докажите геометрически, что

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \dots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

13* Найдите сумму квадратов первых n нечётных чисел.

14* Найдите (каким-нибудь способом) формулу для суммы $\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_n$.

15* На рисунке изображена таблица умножения чисел $1, 2, \dots, n$ на числа $1^2, 2^2, \dots, n^2$.

	1^2	2^2	3^2	k^2	n^2
1	1	4	9	$1 \cdot k^2$	$1 \cdot n^2$
2	2	8	18	$2 \cdot k^2$	$2 \cdot n^2$
3	3	12	27	$3 \cdot k^2$	$3 \cdot n^2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
k	$k \cdot 1^2$	$k \cdot 2^2$	$k \cdot 3^2$	$k \cdot k^2$	$k \cdot n^2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$n \cdot 1^2$	$n \cdot 2^2$	$n \cdot 3^2$	$n \cdot k^2$	$n \cdot n^2$

а) Найдите сумму всех чисел в этой таблице.

б) Найдите сумму чисел, стоящих в выделенном уголке (представьте в виде многочлена от k).

в) Выведите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.